**Primjer 11**. Naći $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$.

Rješenje. Neka je $D=b^2-4ac$. Razmotrićemo tri slučaja: 1) D>0. Podintegralnu funkciju rastaviti na parcijalne razlomke. 2)D=0. Kvadratni trinom je potpun kvadrat, pa se integral rješava smjenom promjenljivih. 3) D<0. U ovom slučaju izračunavanje integrala vršimo u dvije etape: Cilj je da se dati integral svede na oblik $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$. Prilikom ovih transformacija pojavljuje se novi integral koji se dopunjavanjem do potpunog kvadrata i metodom smjene promjenljivih svodi na integral $\int \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+C$. Specijalno:

a) $\int \frac{5x+6}{2x^2+5x+3}dx=\int\left(\frac{3}{x+1}-\frac{1}{2x+3}\right)dx=\ln\left|\frac{(x+1)^3}{\sqrt{|2x+3|}}\right|+C$.

b) $\int \frac{2x-1}{x^2+6x+9}dx=\int \frac{2x-1}{(x+3)^2}dx=\begin{pmatrix}x+3=t\\ dx=dt\end{pmatrix}=\int \frac{2(t-3)-1}{t^2}dt=\int \frac{2t-7}{t^2}dt=$

$2\int\frac{dt}{t}-7\int\frac{dt}{t^2}=2\ln|t|+\frac{7}{t}+C=2\ln|x+3|+\frac{7}{x+3}+C$.

c) $\int \frac{x+1}{x^2-2x+2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-2)+4}{x^2-2x+2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-2)dx}{x^2-2x+2}+2\int\frac{dx}{(x-1)^2+1}dx=$

$\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)+2\operatorname{arctg}(x-1)+C$.

## e) Integrali racionalnih funkcija

Racionalnom funkcijom nazivamo izraz oblika $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdje su P(x) i Q(x) polinomi. Ako je stP(x)<stQ(x), tada racionalnu funkciju nazivamo pravilnom, u suprotnom –nepravilnom.

Dijeljenjem polinoma P(x) i Q(x) svaku nepravilnu racionalnu funkciju možemo predstaviti kao sumu polinoma i jedne pravilne racionalne funkcije. Kako se lako integrali dio koji je polinom, to ćemo se nadalje baviti samo dijelom koji je pravilna racionalna funkcija.

Sljedeće pravilne racionalne funkcije nazivamo prostim racionalnim funkcijama:

I. $\frac{1}{x-a}$, II. $\frac{1}{(x-a)^k}$, k=2,3..., III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, n=2,3... ,

pri čemu se pretpostavlja da su A, B, p i q realni brojevi i da je diskriminanta kvadratnog trinoma u slučajevima III i IV manja od nule.

Svaka pravilna racionalna funkcija se može predstaviti kao suma prostih racionalnih funkcija navedena 4 tipa. Neka je

$$Q_m(x)=(x-a_1)^{k_1}\cdot(x-a_2)^{k_2}\cdots\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{r_2}\cdots,$$

gdje su $k_1$, $k_2$.... $r_1$, $r_2$... prirodni brojevi i $a_i \neq a_j$ za i≠j. Tada je

Scanned by TapScanner

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{(x-a_1)^2}+....+\frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{B_1}{x-a_2}+\frac{B_2}{(x-a_2)^2}+....+\frac{B_{k_2}}{(x-a_2)^{k_2}}+...+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+...+\frac{B_{r_1}x+C_{r_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}}+$$

$$+\frac{R_1x+L_1}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{R_2x+L_2}{(x^2+p_2x+q_2)^2}+...+\frac{R_{r_2}x+L_{r_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{r_2}}+... .$$

gdje su $A_1, A_2$ ..., $B_1, B_2$ ..., $M_1$, $M_2$ ... konstsnte koje se određuju metodom neodređenih koeficijenata.

Integrali od prostih pravilnih racionalnih funkcija:

- $\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C$,
- $\int\frac{dx}{(x-a)^k}=\frac{1}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C$, $k>1$,
- $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$,
- $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{A}{2(1-n)}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\int\frac{dy}{(y^2+a^2)^n}+C$, gdje

je $y=x+\frac{p}{2}$ i $a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$. Za izračunavanje integrala $\int\frac{dy}{(y^2+a^2)^n}$ koristi se rekurentna

formula $\int\frac{dy}{(y^2+a^2)^n}=\frac{1}{2(1-n)a^2}\cdot\frac{1}{(y^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\int\frac{dy}{(y^2+a^2)^{n-1}}$, $n>1$.

Kod integraljenja pravilnih racionalnih funkcija $\frac{P(x)}{Q(x)}$ osnovni problem je njeno predstavljanje kao sume prostih racionalnih funkcija. U zavisnosti od toga kakve su nule polinoma Q(x), razlikujemo 4 slučaja, i to:

a) Korijeni realni i različiti. Tada je $Q(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ i

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+...+\frac{A_n}{x-x_n}.$$

b) Korijeni realni i među njima ima jednakih. Neka je $x_1$ nula polinoma Q(x) višestrukosti p, a ostale nule polinoma Q(x) su proste. Tada je $Q(x)=(x-x_1)^p(x-x_{p+1})\cdots(x-x_n)$ i

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+...+\frac{A_p}{(x-x_1)^p}+\frac{B_1}{x-x_{p+1}}+...+\frac{B_{n-p}}{x-x_n}.$$

c) Korijeni kompleksni i različiti. Neka su koeficijenti polinoma realni brojevi. Tada se kompleksne nule javljaju u parovima konjugovano-kompleksnih brojeva, tj. ako je $x_1=\alpha+\beta i$ jedna nula, tada je druga nula $x_2=\overline{x_1}=\alpha-\beta i$. Kako je $(x-x_1)(x-x_2)=(x-\alpha)^2+\beta^2=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=x^2+px+q$, to je

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{x^2+p_2x+q_2}+\ldots$$

d) Korijeni kompleksni i višestruki. Neka je $\alpha+\beta i$ nula polinoma $Q(x)$ višestrukosti p. Tada je $\alpha-\beta i$ takođe nula polinoma $Q(x)$ višestrukosti p. Sada je

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+\ldots+\frac{M_px+N_p}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^p}+\ldots.$$

**Primjer 12.** Razložiti funkciju $\frac{1}{x^4+x^2+1}$ na proste racionalne funkcije. Kako je $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2$, to je $x^4+x^2+1=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$. Dalje je $\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{Ax+B}{x^2-x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$, odnosno $(A+C)x^3+(A+B-C+D)x^2+(A+B+C-D)x+(B+D)=1$, odnosno A+C=0, A+B−C+D=0, A+B+C−D=0, B+D=1. Odavde slijedi da je $A=-\frac{1}{2}$, $B=C=D=\frac{1}{2}$, tj. $\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{-x+1}{x^2-x+1}+\frac{x+1}{x^2+x+1}\right)$.

Postoje integrali koji se pogodnom smjenom mogu svesti na integrale od racionalnih funkcija. Na primjer, integrali $\int R(\sin x,\cos x)dx$, gdje je R racionalna funkcija, se smjenom $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ svode na integrale od racionalne funkcije. Dovoljno je izvršiti smjene $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$,

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}\quad \text{i}\quad \cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

**Primjer 13.** Naći $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$. Označimo sa I dati integral. Uvedimo smjenu $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$. Tada je $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ i $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. Zamjenom u integral I dobijamo da je $I=\int\frac{dt}{3t^2+2t+2}$. Dalje je $I=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{9}}=---=\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{3\cdot\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C$.

Integrali oblika $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ se smjenom $x+\frac{b}{2a}=t$ svode na (sumu integrala):

$A\int \frac{tdt}{\sqrt{at^2+m}}+B\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+m}}$. Prvi integral se rješava metodom smjene promjenljivih, a drugi se svodi na tablični integral.

**Primjer 14.** Naći $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$. Kako je $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$, to poslije smjene t=x+2 dobijamo da je $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx = \int \frac{2t-3}{\sqrt{t^2+1}}dt = 2\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}-3\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} =$

$2\sqrt{t^2+1}-3\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C=2\sqrt{x^2+4x+5}-3\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C.$

Primjer 1:

1) $\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}dx$

Kako je $x^3-5x^2+6x = x(x^2-5x+6) = x(x-2)(x-3)$

to podintegralnu funkciju rastavljamo na sljedeći način:

$$\frac{2x^2-1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

Odredimo konstante $A, B, C$ iz uslova:

$$2x^2-1 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)$$

$$2x^2-1 = A(x^2-5x+6) + B(x^2-3x) + C(x^2-2x)$$

$$2x^2-1 = (A+B+C)x^2 + (-5A-3B-2C)x + 6A$$

Iz sistema: $A+B+C=2$

$-5A-3B-\cancel{2C}=0$, dobijamo $A=-\frac{1}{6}$

$\cancel{6A=1}$ $\qquad B=-\frac{7}{2}$

$6A=-1$ $\qquad C=\frac{17}{3}$

pa je $\frac{2x^2-1}{x(x-2)(x-3)} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x} - \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{17}{3}\cdot\frac{1}{x-3}$

Dakle, $\int\frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x} = -\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x} - \frac{7}{2}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{17}{3}\int\frac{dx}{x-3} =$

$= -\frac{1}{6}\ln|x| - \frac{7}{2}\ln|x-2| + \frac{17}{3}\ln|x-3| + C.$

b) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$

H) $\displaystyle\frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$

$\Leftrightarrow\ x = A(x-1)(x^2+2x+2) + B(x^2+2x+2) + (Cx+D)(x-1)^2$

$\Leftrightarrow\ x = A(x^3+x^2-2) + B(x^2+2x+2) + C(x^3-2x^2+x) +$
$+ D(x^2-2x+1)$

$\Leftrightarrow\ x = (A+C)x^3 + (A+B-2C+D)x^2 + (2B+C-2D)x +$
$+ (-2A+2B+D)$

Iz sistema:
$$\begin{aligned} A+C&=0\\ A+B-2C+D&=0\\ 2B+C-2D&=1\\ -2A+2B+D&=0 \end{aligned}$$
dobijamo $A=\frac{1}{25}$, $B=\frac{1}{5}$, $C=-\frac{1}{25}$, $D=-\frac{8}{25}$

Dakle,

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{1}{25}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{5}\int\frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{1}{25}\int\frac{x+8}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{25}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{50}\int\frac{2x+16}{x^2+2x+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{25}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{50}\left(\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + 14\int\frac{dx}{x^2+2x+2}\right)$$

$= (*)$

Kako je $\displaystyle\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx = \begin{bmatrix} x^2+2x+2=t \\ (2x+2)dx=dt \end{bmatrix} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t|+C =$

$= \ln(x^2+2x+2)+C$

i $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+2x+2} = \int\frac{dx}{(x+1)^2+1} = \begin{bmatrix} x+1=t \\ dx=dt \end{bmatrix} = \int\frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C =$

$= \operatorname{arctg}(x+1)+C$

to je:

$$\circledast = \frac{1}{25}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{50}\left(\ln(x^2+2x+2) + 14\,\mathrm{arctg}\,(x+1)\right) + C.$$

c) $\displaystyle\int \frac{x^6+x^4-1}{x^4+x^2+1}\,dx$

R: Primijetimo da je stepen polinoma u imeniocu manji od stepena polinoma u brojiocu.

$$(x^6+x^4-1) : (x^4+x^2+1) = x^2$$
$$-(x^6+x^4+x^2)$$
$$\overline{\qquad -x^2-1 \qquad}$$

Dakle, $\displaystyle\frac{x^6+x^4-1}{x^4+x^2+1} = x^2 - \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$

$$\Rightarrow \int \frac{x^6+x^4-1}{x^4+x^2+1}\,dx = \int x^2\,dx - \int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx = \circledast$$

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx = ?$$

$$x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-1 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

$$\frac{x^2+1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2-x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+1 = (Ax+B)(x^2+x+1) + (Cx+D)(x^2-x+1)$$

$$x^2+1 = (A+C)x^3 + (A+B-C+D)x^2 + (A+B+C-D)x + B + D.$$

Scanned by TapScanner

Iz sistema:

$A+C=0$

$A+B-C+D=1$ dobijamo $A=C=0$

$A+B+C-D=0$ $\quad B=D=\frac{1}{2}$.

$B+D=1$

$$\int\frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1} \quad (1)$$

$$\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\begin{bmatrix} x-\frac{1}{2}=t \\ dx=dt\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{4}{3}\int\frac{dt}{\frac{4t^2}{3}+1}=\frac{4}{3}\int\frac{dt}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\begin{bmatrix}\frac{2t}{\sqrt{3}}=s \\ dt=\frac{\sqrt{3}}{2}ds\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{ds}{s^2+1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} s+C=\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

Slično, $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

pa iz (1) dobijamo:

$$\int\frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}=\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

odnosno:

$$\int\frac{x^6+x^4-1}{x^4+x^2+1}\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

- Integrali nekih klasa trigonometrijskih funkcija - (5)

1) Razmatramo integral oblika:

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx \qquad (1)$$

gdje je $R$ racionalna funkcija.

Integral (1) se smjenom $tg\frac{x}{2}=t$ svodi na integral racionalne funkcije. Za to je potrebno izraziti $\sin x$, $\cos x$ i $dx$ pomoću $t$:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$t = tg\frac{x}{2}, \quad x = 2\,arctg\, t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Ovakvom smjenom integral (1) svodi se na integral racionalne funkcije.

<u>Primjer 1:</u> $$\int\frac{dx}{5+\sin x+3\cos x} = \left| \begin{array}{l} tg\frac{x}{2}=t,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right|$$

$$= \int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{5+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{3-3t^2}{1+t^2}} = \int\frac{dt}{t^2+t+4} = \int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{15}}\,arctg\,\frac{1+2t}{\sqrt{15}} + C = \frac{2}{\sqrt{15}}\,arctg\,\frac{1+2tg\frac{x}{2}}{\sqrt{15}} + C.$$

2) Ako integral ima oblik $\int R(\sin x)\cos x\,dx$ tada se smjenom $\sin x = t$ ovaj integral svodi na integral racionalne funkcije. Slično, ako integral ima oblik $\int R(\cos x)\sin x\,dx$ uvodimo smjenu $\cos x = t$.

3) Ako integral ima oblik $\int R(tg\,x)dx$ onda se smjenom $tg\,x = t$ ovaj integral svodi na integral racionalne funkcije.

Primjer: a) $\int \frac{\sin x\,dx}{3-\cos x} = \left[\begin{array}{l}\cos x = t\\ -\sin x\,dx = dt\end{array}\right] = -\int \frac{dt}{3-t} =$

$= \ln|t-3| + C = \ln|\cos x - 3| + C.$

b) $\int tg^4 x\,dx = \left[\begin{array}{l}tg\,x = t\\ x = arctg\,t\\ dx = \frac{dt}{1+t^2}\end{array}\right] = \int \frac{t^4}{1+t^2}\,dt =$

$= \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right)dt = \frac{t^3}{3} - t + arctg\,t + C =$

$= \frac{tg^3 x}{3} - tg\,x + x + C.$

4) Ako podintegralna funkcija ima oblik $R(\sin x, \cos x)$ pri čemu su $\sin x$ i $\cos x$ samo sa parnim stepenima, tada se smjenom $tg x = t$ dati integral svodi na integral racionalne funkcije. Za transformaciju podintegralnog izraza potrebno je $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, i $dx$ izraziti pomoću $t$:

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

slično $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$; $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Primjer 3: $\int \frac{1-\cos^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx = \left[ \begin{array}{l} tg\, x = t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right]$

$$= \int \frac{t^2\,dt}{(1+2t^2)(1+t^2)} = -\int \frac{dt}{1+2t^2} + \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\, arctg\, \sqrt{2}\, t + arctg\, t + C = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, arctg\, \sqrt{2}\, tg\, x + x + C.$$

$$\left( \frac{t^2}{(1+2t^2)(1+t^2)} = \frac{At+B}{1+2t^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2} \right)$$

5) a) Ukoliko je $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ uvodimo smjenu $\cos x = t$

b) Ukoliko je $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ uvodimo smjenu $\sin x = t$

c) Ako je $R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ uvodimo smjenu $tg\, x = t$

Primjer 4: $\int \frac{dx}{(3+\cos x)\sin x} = -\int \frac{\sin x\,dx}{(3+\cos x)\sin^2 x} =$

$$= -\int \frac{\sin x\,dx}{(3+\cos x)(1-\cos^2 x)} = \left[ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{dt}{(3+t)(1-t^2)} = (*)$$

$$\frac{1}{(3+t)(1-t^2)} = \frac{1}{(3+t)(1-t)(1+t)} = \frac{A}{3+t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t}$$

$$(*) = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(1-\cos x)(3+\cos x)}{(1+\cos x)^2} \right| + C.$$

6) Razmotrimo integrale oblika $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ gdje su $m$ i $n$ cijeli brojevi

1. slučaj: Ako je bar jedan od brojeva $m$ i $n$ neparan, npr. $n = 2p+1$ gdje je $p \in \mathbb{Z}$, tada je:

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^m x \, (1-\sin^2 x)^p \cos x \, dx.$$

Ovaj integral rješavamo smjenom $\sin x = t$.

<u>Primjer 5:</u> $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \, (1-\sin^2 x) \cos x \, dx =$

$$= \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{bmatrix} = \int t^2 (1-t^2) \, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

2. slučaj: a) Ako su $m$ i $n$ parni brojevi i $m = 2p$, $n = 2q$ gdje su $p, q \in \mathbb{N}_0$.

Tada je $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, pa je $\int \sin^{2p} x \cos^{2q} x \, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^p \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^q dx$

b) Ako su $m$ i $n$ parni brojevi pri čemu je bar jedan od njih negativan, uvodi se smjena $\operatorname{tg} x = t$ (ili $\operatorname{ctg} x = t$).

7) Za računanje integrala $\int \sin ax \sin bx \, dx$, $\int \sin ax \cos bx \, dx$, $\int \cos ax \cos bx \, dx$ koristimo formule:

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right)$$

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\sin(a-b)x + \sin(a+b)x\right)$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x\right).$$

Primjer 6: a) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int tg^4 x \,\frac{dx}{\cos^2 x} =$

$$= \left[\begin{array}{l} tg x = t \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{array}\right] = \int t^4\,dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{tg^5 x}{5} + C.$$

b) $\int \sin^3 2x \cdot \cos^2 3x \, dx = \int \sin 2x \cdot \sin^2 2x \cdot \cos^2 3x \, dx =$

$$= \int \sin 2x \cdot \frac{1-\cos 4x}{2}\cdot\frac{1+\cos 6x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin 2x \left(1 - \cos 4x + \cos 6x - \cos 4x \cdot \cos 6x\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin 2x\,dx - \frac{1}{4}\int \sin 2x \cos 4x\,dx + \frac{1}{4}\int \sin 2x \cos 6x\,dx$$

$$- \frac{1}{8}\int \sin 2x\left(\cos 2x + \cos 10x\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{8}\int(\sin 6x - \sin 2x)\,dx + \frac{1}{8}\int(\sin 8x - \sin 4x)\,dx$$

$$- \frac{1}{16}\int \sin 4x\,dx - \frac{1}{16}\int(\sin 12x - \sin 8x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{16}\int \sin 12x\,dx + \frac{3}{16}\int \sin 8x\,dx - \frac{1}{8}\int \sin 6x\,dx$$

$$- \frac{3}{16}\int \sin 4x\,dx + \frac{1}{8}\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{192}\cos 12x -$$

$$- \frac{3}{128}\cos 8x + \frac{1}{48}\cos 6x + \frac{3}{64}\cos 4x - \frac{5}{16}\cos 2x + C$$